SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

N. Garofalo

PERTURBAZIONI D'ORDINE ZERO DEL LAPLACIANO SUB-ELLITTICO SUL GRUPPO DI HEISENBERG E LORO PROPRIETÀ DI UNICITÀ

11 Gennaio 1990

Nella presente nota si espongono alcuni risultati contenuti nel lavoro [GL], in collaborazione con E. Lanconelli.

Il gruppo di Heisenberg $\mathbf{H}^n$ di dimensione $N=2n+1$, $n \in \mathbf{N}$, è il gruppo di Lie nilpotente di passo due formato dallo spazio Euclideo $\mathbf{R}^{2+1}$ dotato della seguente operazione di moltiplicazione

$$(1) \qquad (x,y,t) \bullet (x',y',t') = (x+x',\ y+y',\ t+t' + 2\,(x'.y - x.y')),$$

dove $x,y,\ x',\ y' \in \mathbf{R}^n$ e $x.y$ denota il prodotto interno usuale in $\mathbf{R}^n$. Nel seguito adotteremo la notazioen (z,t) per denotare il generico punto $(x,y,t) \in \mathbf{R}^{2n+1}$. Si riconosce subito dalla (1) che $(z,t) \bullet (0,0) = (z,t)$ e che $(z,t)^{-1} = (-z,\ -t)$.

Una base per l'algebra di Lie dei campi vettoriali su $\mathbf{H}^n$ invarianti a sinistra rispetto alla (1) è fornita da 2n-1 campi

$$(2) \qquad X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2y_j \frac{\partial}{\partial t}\ ,\ \ Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} - 2x_j \frac{\partial}{\partial t}\ ,\ \ \frac{\partial}{\partial t}\ ,\ \ j = 1,\dots,n.$$

E' immediato verificare che

$$(3) \qquad [X_j,\ Y_k] = 4\,\delta_{jk} \frac{\partial}{\partial t} \qquad j,k = 1,\dots,n$$

Le (3) riflettono le relazioni di commutazione di Heisenberg della meccanica quantistica per posizione e momento, donde il nome gruppo di Heisenberg. La (3) implica, in virtù di un risultato di Hörmander [H], che il Laplaciano sub-ellittico su $\mathbf{H}^n$

$$(4) \qquad \Delta_{\mathbf{H}^n} = \sum_{j=1}^{n} (X_j^2 + Y_j^2)$$

è un operatore ipoellittico (ma non ellittico). Infatti, si veda la (19) più avanti, $\Delta_{\mathbf{H}^n}$ è analitico ipoellittico e quindi una soluzione di $\Delta_{\mathbf{H}^n} u = 0$ in un aperto connesso $D \subset \mathbf{H}^n$ non può annullarsi con tutte le sue derivate in un punto $(z_o, t_o) \in D$, a meno che $u \equiv 0$ in D. Un celebrato risultato di Carleman del 1939 in $\mathbf{R}^2$, successivamente esteso da diversi autori a qualunque dimensione, stabilisce il principio che una perturbazione L^∞_{loc} del Laplaciano in $\mathbf{R}^n$ gode, $H = -\Delta + V$, gode delle stesse proprietà d'unicità forte di Δ. Inoltre, un principio simile vale per perturbazioni non limitate di Δ.

Noi siamo interessati a ottenere una versione quantitativa della proprietà d'unicità sopra richiamata per soluzioni della equazione

$$(5) \qquad -\Delta_{\mathbf{H}^n} u + Vu = 0 ,$$

dove $\Delta_{\mathbf{H}^n}$ è definito come in (4) e sul termine d'ordine zero V si fanno certe ipotesi. Più precisamente, cerchiamo una stima dell'ordine di zero in un punto

di una soluzione di (5).

Tale stima dovrebbe dipendere, in un modo quantitativamente preciso, solo da proprietà locali di V e da opportune norme L^2 di u e di $X_j u$, $Y_j u$, $j = 1,\dots,n$, in un intorno del punto in questione.

Sfortunatamente, un tale risultato non può sussistere per un'arbitraria soluzione u di (5), perfino nel caso in cui $V \in C^\infty$. Ciò è conseguenza di un recente risultato negativo di Bahouri [Ba] relativo a operatori in $\mathbf{R}^N$ del tipo

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{N-1} X_j^2 \tag{6}$$

Teorema (Bahouri) *Siamo* $X_0, X_1, \dots, X_{N-1}$ *campi vettoriali* C_∞ *in un aperto* $D \subset \mathbf{R}^N$. *Si supponga che*

(i) *Lo spazio vettoriale generato da* $X_1,\dots, X_{N-1}$ *abbia dimensione* N-1 *in ogni punto di* D.

(ii) *Il rango dell'algebra di Lie generata da* $X_1,\dots,X_{N-1}$ *sia* N *in ogni punto di* D.

(iii) *Esista un punto* $x_0 \in D$ *tale che in un intorno di* x_0

$$\varepsilon_N \wedge d\varepsilon_N \not\equiv 0 \quad , \quad \varepsilon_N \wedge (d\varepsilon_N)^2 = 0 ,$$

essendo ε_N *la 1-forma definita da*

$$\varepsilon_N(X) = X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_{N-1} \wedge X.$$

Allora esiste un aperto Ω, *con* $x_0 \in \Omega \subset D$, *e una funzione* $V \in C^\infty(\Omega)$ *tale che l'equazione* $-\mathfrak{L}u + Vu = 0$, *dove* $\mathfrak{L} = \sum_{j=1}^{N-1} X_j^2 + X_0$, *ammette una soluzione non banale in* Ω *che s'annulla in un sottoinsieme aperto di* Ω.

Osserviamo esplicitamente che l'ipotesi (ii) è quella del sopracitato teorema di Hörmander sull'ipoellitticità. La conclusione del teorema di Bahouri vale, quando N = 3 o 4, senza l'ipotesi (iii). Ne deriva che, quando N = 3 o 4, la proprietà d'unicità manca per tutti gli operatori del tipo suddetto. Ad esempio, l'operatore

$$\mathfrak{L} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} - 4x\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \qquad (x,y,t) \in \mathbf{R}^3, \tag{7}$$

$$\operatorname{supp} V \subset \{x \geq 0\} \cap \Omega \quad , \quad V \text{ è piatto a } \{x = 0\}, \tag{8}$$

per cui l'equazione $-\mathfrak{L}u + Vu = 0$ ammette una soluzione non banale u in Ω, piatta a $\{x = 0\}$ e supportata in $\{x \geq 0\} \cap \Omega$. Il cambiamento di variabile $(x,y,t) \to (x',y',t')$ definito da $x' = x$, $y' = y$, $t' = t-2xy$, manda il piano $\{x = 0\}$ nel piano $\{x' = 0\}$, e trasforma

$\Delta_{\mathbf{H}}1 = \left(\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} - 2x\frac{\partial}{\partial t}\right)^2$ in $\mathfrak{L}$ dato da (7) . Esiste perciò un intorno dell'origine Ω e un $V \in C^\infty(\Omega)$ e soddisfacente (8) per cui $-\Delta_{\mathbf{H}}1 + V$ non ha la proprietà d'unicità.

Incidentalmente, se V è analitico reale, allora un teorema di Bony [B] basao sul teorema di Holmgren assicura che $-\Delta_{\mathbf{H}^n} + V$ ha la proprietà di unicità.

Vi sono risultati positivi quando V non è analitico? In [GL] si dà una risposta positiva a tale quesito fornendo una condizione sufficiente perché una soluzione di (5) abbia uno zero d'ordine finito, anche permettendo al potenziale V d'essere singolare.

Una semplice verifica basata sulla (2) permette di riconoscere che nelle coordinate (z,t) risulta

$$\Delta_{\mathbf{H}^n} u = \Delta_z u + 4|z|^2 \frac{\partial u}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial}{\partial t} (Tu), \tag{9}$$

dove $\Delta_z = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \right)$, e T è il campo vettoriale

$$T = \sum_{j=1}^{n} \left(y_j \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right). \tag{10}$$

Un gruppo importante di automorfismi di $\mathbf{H}^n$ è fornito dalle dilatazioni anisotrope

$$\partial_\lambda (z,t) = (\lambda z, \lambda^2 t) \quad \lambda > 0. \tag{11}$$

Se poniamo

$$(12) \qquad G = \left(\begin{array}{c|c} I_{\mathbf{R}^{2n}} & \begin{matrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \cdot \cdot \cdot 0 & 2 \end{array}\right)$$

dove $I_{\mathbf{R}^{2n}}$ è la matrice identità su $\mathbf{R}^{2n}$, allora è facile verificare che

$$(13) \qquad \exp(G \log \lambda) = \delta_\lambda \ ,$$

e quindi la *dimensione omogenea* del gruppo $\mathbf{H}^n$ è data da (cfr. ad es. [FS])

$$(14) \qquad Q = \mathrm{tr}\,(G) = 2n + 2 \ .$$

Una funzione $u : \mathbf{H}^n \to \mathbf{R}$ si dice *Heisenberg-omogenea* di grado $k \in \mathbf{Z}$ se per ogni $\lambda > 0$ si ha

$$(15) \qquad u \circ \delta_\lambda = \lambda^k u \ .$$

Se definiamo

(16) $$X = \sum_{j=1}^{n} \left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right) + 2t \frac{\partial}{\partial t} ,$$

allora è facile verificare che u è Heisenberg-omogenea di grado k se e solo se

(17) $$Xu = ku .$$

Una funzione omogenea di grado uno che gioca un ruolo privilegiato nell'analisi di $\mathbf{H}^n$ è la funzione *distanza*

(18) $$d(z,t) = (|z|^4 + t^2)^{1/4} .$$

È un fatto notevole che la soluzione fondamentale $\Gamma(z,t)$ di $-\Delta_{H^n}$ con singolarità nell'origine sia data da

(19) $$\Gamma(z,t) = \frac{C_Q}{d(z,t)^{Q-2}} \quad (z,t) \not\equiv (0,0) ,$$

dove $C_Q > 0$ è un numero che dipende solo da Q in (14). Ciò fu provato da Folland in [F]. In virtù di (19) gli insiemi di livello di Γ sono dati dalle sfere nella metrica generata da (18). Precisamente, se $r > 0$ poniamo

(20) $$\Omega_r = \{(z,t) \in H^n \mid d(z,t) < r\} , \quad \partial\Omega_r = \{(z,t) \in \mathbf{H}^n \mid d(z,t) = r\} .$$

Essendo il problema dell'unicità locale, lavoriamo da questo momento in avanti in una palla Ω_{R_0} in (5) facciamo la seguente ipotesi: esistono $C > 0$ e una funzione crescente $f: (0,R_0) \to \mathbf{R}^+$ tale che

$$(21) \qquad \int_0^{R_0} \frac{f(r)}{r}\, dr < \infty$$

e

$$(22) \qquad |V(z,t)| \leq C \frac{f(d(z,t))}{d(z,t)^2}\ \Psi(z,t) \quad , \quad \text{per q.o. } (z,t) \in \Omega_{R_0} \ ,$$

dove s'è posto

$$(23) \qquad \psi(z,t) = \frac{|z|^2}{d(z,t)^2} \qquad (z,t) = (0,0) \ .$$

Il ruolo della funzione ψ in (22) sarà chiarito più avanti. Per il momento ci limitiamo a osservare che: (i) ψ è Heisenberg-omogenea di grado zero; (ii) $\psi(z,0) \equiv 1$; (iii) $\psi(0,t) \equiv 0$. Riguardo alla funzione f osserviamo esplicitamente che (21) implica $\lim_{r \to 0^+} f(r) = 0$. Rappresentanti tipiche sono

le funzioni $f(r) = r^{\varepsilon}$, $0 < \varepsilon$, $f(r) = \left(\log \frac{1}{r}\right)^{-\alpha}$, $\alpha < 1$.

Quando nel seguito parleremo di *soluzione* u di (5) in Ω_{R_0}, intenderemo che u sia una funzione continua in Ω_{R_0} tale che u, $X_j u$, $Y_j u$, $\Delta_{H^n} u \in L_2(\Omega_{R_0})$, $j = 1,\dots,n$, e tale che u verifica (5) in senso debole.

Definizione. Si dice che una funzione u tale che $\psi^{1/2} u \in L^2(\Omega_{R_0})$ *s'annulla d'ordine infinito* nell'origine se quando $r \to 0^+$

(24) $$\int_{\Omega_r} u^2 \psi \, dz \, dt = 0(r^k) \quad \text{per ogni } k \in \mathbf{N}.$$

Teorema 1. *Sia* V *una funzione misurabile su* Ω_{R_0} *soddisfacente alle* (21), (22). *Sia* u *una soluzione di* (5) in Ω_{R_0} *e si supponga che esistano* $C_1 > 0$ *e* $g: (0,R_0) \to \mathbf{R}^+$ *crescente tali che* g *soddisfi* (21) *e*

(25) $$|t\, Tu(z,t)| \le C_1 \; g(d(z,t)) |z|^2 \, |u(z,t)| \quad \textit{per q.o. } (z,t) \in \Omega_{R_0},$$

essendo T *il campo vettoriale definito in* (10). *Allora esistono* $r_0 = r_0(Q,C,C_1,f,g) > 0$ *e* $\Gamma = \Gamma(Q,C,C_1,f,g,u) > 0$ *tali che se* $u \not\equiv 0$ *in* Ω_r *con*

$0<r<\frac{r_0}{2}$ *risulta*

$$\int_{\Omega_{2r}} u^2 \psi \, dz \, dt \leq \Gamma \int_{\Omega_r} u^2 \Psi \, dz \, dt \ . \tag{26}$$

Teorema 2. *Nelle ipotesi del Teorema 1 se* u *s'annulla d'ordine infinito nell'origine dev'essere* $u \equiv 0$ *in* Ω_{r_0}, *essendo* r_0 *il numero la cui esistenza è asserita sopra.*

Osservazioni. a) La costante T deve dipendere dalla particolare u in esame. Basta infatti considerare le funzioni $u_k(x,y,t) = \mathrm{Im}(x + iy)^k$. Queste sono soluzioni di $\Delta_H u = 0$ in $\mathbf{R}^3$ e risulta $\Gamma = \Gamma_k \cong 2^k$. b) La dipendenza di r_0 e Γ dai parametri Q, C, C_1, f, g e u è esplicita. La dimostrazione del Teorema 1 dà infatti: $r_0 > 0$ è un numero che deve soddisfare alle limitazioni

$$f(r_0) < C^{-1} \left(\frac{Q-2}{2}\right)^2 \ , \quad g(r_0) < 2\, C_1^{-1} \ ,$$

mentre Γ è determinato dalla formula

$$\Gamma = 2^Q \exp\{2 \log 2 \max(1,N(r_o))[1+\exp(M \int_0^{R_o} [f(s)+g(s)] \frac{ds}{s})]\}$$

essendo $M = M(Q,C,C_1,f,g) > 0$ e

$$N(r_o) = \frac{\int_{\Omega_{ro}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} [(X_j u)^2 + (Y_j u)^2] + Vu^2 \right\} dz\, dt}{\int_{\partial\Omega_{ro}} u^2 \frac{\Psi}{|\nabla d|} dH_{2n}}$$

c) La condizione (25) è banalmente soddisfatta dalle funzioni u tali che $Tu \equiv 0$. Queste sono le funzioni invarianti rispetto all'azione naturale del toro **T** su $\mathbf{H}^n$. Se si identifica $(x,y) \in \mathbf{R}^{2n}$ con $z = (\tilde{z}_1,\ldots,(\tilde{z}_n) \in \mathbf{C}^n$, dove $\tilde{z}_j = x_j+iy_j$, allora **T** agisce su $\mathbf{T}^n$ mediante la

$$\phi_\theta(\tilde{z},t) = (e^{i\theta}\, \tilde{z},t), \quad \theta \in [0,2\pi] .$$

Si riconosce facilmente che

$$Tu \equiv 0 \quad \text{se e solo se} \quad u \circ \phi_\theta \equiv u .$$

È importante osservare che dato un potenziale V soddisfacente alle (21), (22) la conclusione del Teorema 1 è falsa se non si restringe in qualche modo la classe delle soluzioni di (5). Se infatti si sceglie $f(r) = r^2$ in (21), cosicché la

(22) diventa

$$|V(z,t)| \leq C\,\psi(z,t) \quad \text{per q.o. } (z,t) \in \Omega_{R_0} ,$$

è facile vedere che questa condizione è soddisfatta dal potenziale di Bahouri, essendo quest'ultimo piatto a $\{x = 0\}$. Ciò nondimeno la (25) costituisce una condizione solo sufficiente perché valga (26). Infatti, si può dimostrare

Proposizione 1. *Sia* u *una funzione Heisenberg-omogenea di grado* $k>0$ *che sia soluzione di* $\Delta_{H^n} u = 0$ *in* Ω_{R_0}. *Allora, per ogni* $r \in (0, \frac{R_0}{2})$ *si ha*

$$\int_{\Omega_{2r}} u^2\,\psi\,dz\,dt = 2^{Q+2k} \int_{\Omega_r} u^2\,\psi\,dz\,dt \ . \tag{27}$$

Se consideriamo $u(x,y,t) = x\,|z|^2 + 2ty$, allora $\Delta_{H^1} u = 0$ e u è Heisenberg omogenea di grado 3. Allora u verifica la (27), mentre è facile vedere che non sussiste una stima come la (25).

La dimostrazione del Teorema 1 si basa sui seguenti ingredienti:

(I) Formule di rappresentazione per funzioni su $\mathbf{H}^n$ come integrali sulle sfere e palle (20).

(II) Una forma di principio d'ideterminazione per $\mathbf{H}^n$.

(III) Stime sub-ellittiche della variazione prima dell'integrale dell'energia associato alla (5).

(IV) L'introduzione di una funzione frequenza su $\mathbf{H}^n$ e lo studio delle sue proprietà differenziali per mezzo di (I), (II) e (III).

Segue una breve discussione di (I)-(IV).

(I) Gaveau [G] ha dimostrato che se $\Delta_{\mathbf{H}^n} = 0$ in $\mathbf{H}^n$ allora

$$u(0,0) = \frac{1}{|\partial\Omega_1|}\int_{\Omega_1} u(z,t)\,\frac{\psi(z,t)}{|\nabla d(z,t)|}\,dH_{2n}\ , \tag{28}$$

essendo dH_{2n} la misura di Hausdorff 2n-dimensionale in $\mathbf{R}^{2n+1}$, mentre se $r>0$ s'è posto

$$|\Omega_r| = \int_{\Omega_r} \psi(z,t)\, dz\, dt \ , \ |\partial\Omega_r| = \frac{d}{dr}\, |\Omega_r| \ .$$

Più in generale, si fa vedere in [GL]

Teorema 3. *Sia* $v \in C^\infty(\mathbf{H}^n)$ *e sia* $r>0$. *Allora*

$$\frac{1}{|\partial\Omega_r|} \int_{\partial\Omega_r} v(z,t) \frac{\psi(z,t)}{|\nabla d(z,t)|} dH_{2n} = v(0,0) + \tag{29}$$

$$\int_{\Omega_r} \Delta_{\mathbf{H}^n} v(z,t) \left[\Gamma(z,t) - \frac{C_Q}{r^{Q-2}} \right] dz\, dt$$

essendo Γ *come in* (19).

(II) Sia $B_r = \{x \in \mathbf{R}^N \mid |x| < r\}$ e sia $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N \setminus \{0\})$.

Allora

$$(30)\quad \int_{B_r} \frac{u^2}{|x|^2}\, dx \le \left(\frac{2}{N-2}\right)^2 \left\{\left(\frac{N-2}{2}\right) \frac{1}{r} \int_{\partial B_r} u^2\, d\sigma + \int_{B_r} |\nabla u|^2\, dx\right\}$$

La (20) dà subito, per densità: sia $u \in H^1(\mathbf{R}^N)$, allora

$$(31)\qquad \int_{\mathbf{R}^N} \frac{u^2}{|x|^2}\, dx \le \left(\frac{2}{N-2}\right)^2 \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2\, dx\ ,$$

che è nota come disuguaglianza di Hardy. La (31), e la disuguaglianza di Schwarz danno

$$\left(\int_{\mathbf{R}^N} |x|^2 u^2 \, dx\right)\left(\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx\right) \geq \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \left(\int_{\mathbf{R}^N} u^2 \, dx\right)^2 , \tag{32}$$

che rappresenta, via il teorema di Plancherel per la trasformata di Fourier una forma del *principio d'indeterminazione* di Heisenberg, cfr. [H1]. Si fa vedere in [GL].

Teorema 4. *Sia* $u \in C_0^\infty(\mathbf{H}^n \setminus \{(0,0)\})$. *Allora, per ogni* $r>0$

$$\int_{\Omega_r} \frac{u^2}{d^2} \psi \, dzdt \leq \tag{33}$$
$$\left(\frac{2}{Q-2}\right)^2 \left\{\left(\frac{Q-2}{2}\right) \int_{\partial\Omega_r} u^2 \frac{\psi}{|\nabla d|} dH_{2n} + \int_{\Omega_r} |\nabla_{\mathbf{H}^n} u|^2 \, dzdt\right\}$$

Nella (33) s'è posto

$$|\nabla_{\mathbf{H}^n} u|^2 \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} \left((X_j u)^2 + (Y_j u)^2\right) . \tag{34}$$

Se si definisce

$$S_1^2(\mathbf{H}^n) = \overline{C_0^\infty(\mathbf{H}^n)}^{\| \ \|_{1,2}}$$

$$(35) \qquad \| u \|_{1,2} \overset{\text{def}}{=} \left(\int_{\mathbf{H}^n} \{u^2 + |\nabla \mathbf{H}^n u|^2\} \, dz \, dt \right)^{1/2} ,$$

allora il Teorema 4 dà

Corollario 1. *Sia* $u \in S_1^2(\mathbf{H}^n)$. *Allora*

$$(36) \qquad \int_{\mathbf{H}^n} \frac{u^2}{d^2} \psi \, dzdt \leq \left(\frac{2}{Q-2}\right)^2 \int_{\mathbf{H}^n} |\nabla_{\mathbf{H}^n} u|^2 \, dz \, dt .$$

La (36) e la disuguaglianza di Schwarz implicano il seguente

Teorema 5. (Principio d'indeterminazione per $\mathbf{H}^n$). *Sia* $u \in S_1^2(\mathbf{H}^n)$ *allora*

$$(37) \qquad \left(\int_{\mathbf{H}^n} d^2 u^2 \psi dzdt\right)\left(\int_{\mathbf{H}^n} |\nabla_{\mathbf{H}^n} u|^2 \, dzdt\right) \geq$$

$$\left(\frac{Q-2}{2}\right)\left(\int_{\mathbf{H}^n} u^2 \, \psi \, dz \, dt\right) .$$

Si confrontino (30), (31) e (32) con (33), (36) e (37).

(III) Uno strumento importante in teoria geometrica della misura e nel calcolo

delle variazioni è la variazione prima dell'integrale dell'energia associato a una certa equazione ellittica, o a un sistema. Per l'operatore di Laplace si ha

$$D(r) = \int_{B_r} |\nabla u|^2 \, dx \quad , \quad x \in \mathbf{R}^N \ ,$$

per l'energia di una funzione in una palla. Le simmetrie speciali del Laplaciano si riflettono sulla variazione prima dell'energia che risulta uguale a

$$D'(r) = \int_{\partial B_r} |\nabla u|^2 dx = \frac{N-2}{r} \int_{B_r} |\nabla u|^2 dx + 2 \int_{\partial B_r} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 d\sigma \tag{38}$$

$$- \frac{2}{r} \int_{B_r} (\nabla u \cdot x) \, \Delta u \, dx \ .$$

E' notevole nella (38) l'assenza di termini contenenti derivate tangenziali di u, un fenomeno che riflette l'ortogonalità del campo conforme $X = r \frac{\partial}{\partial r} = x$ alle superfici di livello della soluzione fondamentale.

Sul gruppo di Heisenberg la situazione è drasticamente diversa in quanto le curve integrali del campo X che rispetta le dilatazioni (11), e cioè il campo definito dalla (16), non sono ortogonali alle superfici di livello della

soluzione fondamentale, cioè le sfere $\partial\Omega_r$ in (20).

Teorema 6. (Variazione prima sub-ellittica). *Sia* $u \in C^\infty(\mathbf{H}^n)$ *e si definisca*

$$D(r) = \int_{\Omega_r} |\nabla_{\mathbf{H}^n} u|^2 \, dz\, dt \ . \tag{39}$$

Allora si ha

$$D'(r) = \frac{Q-2}{r} D(r) + 2 \int_{\partial\Omega_r} \left(\frac{Xu}{r}\right)^2 \frac{\psi}{|\nabla d|} \, dH_{2n} + \tag{40}$$

$$+ 2 \int_{\partial\Omega_r} \left(\frac{Xu}{r}\right)\left(\frac{Tu}{r}\right) \frac{\phi}{|\nabla d|} \, dH_{2n} - \frac{2}{r} \int_{\Omega_r} Xu \, \Delta_{\mathbf{H}^n} u \, dz\, dt.$$

Nella (40) i campi X e T sono quelli definiti rispettivamente da (16) e (10), mentre s'è posto $\phi = \phi(z,t) = \dfrac{t}{d(z,t)^2}$. Va osservata la presenza dell'integrale $\displaystyle\int_{\partial\Omega_r} \left(\frac{Xu}{r}\right)\left(\frac{Tu}{r}\right) \frac{\phi}{|\nabla d|} \, dH_{2n}$, a secondo membro della (40). Siccome il campo T è tangenziale a $\partial\Omega_r$ quest'integrale costituisce una novità rispetto al caso ellittico, in realtà piuttosto sgradita.

(IV) Per mezzo dei teoremi 3-6 si può attaccare la dimostrazione dei teoremi

1 e 2 secondo il metodo sviluppato nei lavori [GLin 1 & 2]. Per Dimostrare la (26) si introduce l'*altezza* di una funzione u su una palla

$$H(r) = \int_{\partial\Omega_r} u^2 \frac{\Psi}{|\nabla d|} \, dH_{2n} \, .$$

E' chiaro che per dimostrare la (26) è sufficiente provare la

$$H(2r) \leq \frac{\Gamma}{2} H(r) \qquad \text{per ogni } r \in (0, \tfrac{r_0}{2}). \tag{41}$$

Lemma 1. *Sia* u *una soluzione di* (5) *in* Ω_{R_0}, *allora*

$$H'(r) = \frac{Q-1}{r} H(r) + 2I(r) \qquad \textit{per q.o.} \quad r \in (0,R_0), \tag{42}$$

dove s'è posto

$$I(r) = \int_{\Omega_r} (|\nabla_H n\, u|^2 + Vu^2) \, dz \, dt \, . \tag{43}$$

Riscrivendo (42) si ha

$$\frac{d}{dr}\left[\log\left(\frac{H(r)}{r^{Q-1}}\right)\right] = 2\frac{I(r)}{H(r)} \quad , \tag{44}$$

per quegli $r \in (0,R_0)$ per cui $H(r) \neq 0$.

Lemma 2. *Esiste* $r_0 = r_0(Q,c,f) > 0$ *tale che* $u \equiv 0$ *in* Ω_{r_0} *oppure* $H(r) = 0$ *per ogni* $r \in (0,r_0)$.

Definizione. Si dice *frequenza* di una soluzione u di (5) in Ω_r la quantità

$$N(r) = \frac{r\, I(r)}{H(r)} \tag{45}$$

Usando (45) riscriviamo (44), nel modo seguente

$$\frac{d}{dr}\left[\log\left(\frac{H(r)}{R^{Q-1}}\right)\right] = 2\,\frac{N(r)}{r} \tag{46}$$

Il risultato cruciale che permette di concludere la dimostrazione del Teorema 1 partendo dalla (46) è

Teorema 7. *Nelle ipotesi del Teorema 1 esistono* $M = M(Q,C,C_1,f,g) > 0$ *e* $r_0 = r_0\,(Q,C,C_1,f,g) > 0$ *tali che per q.o.* $r \in \Lambda_{r_0} = \{r \in (0,r_0) \mid N(r) > \max(1,N(r_0))\}$ *si ha*

$$\frac{N'(r)}{N(r)} \geq -M\left[\frac{f(r) + g(r)}{r}\right]$$

BIBLIOGRAFIA

[BA] H. BAHOURI, *Non prolongement unique des solutions d'operateurs "Somme de Carrés"*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 36, 4 (1986), pp. 137-155.

[B] J.M. BONY, *Principe du maximum, inéqualité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés,* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 19, 1 (1969), pp. 277-304.

[F] G.B. FOLLAND, *A fundamental forr a subelliptic operator,* Bull. of the Amer. Math. Soc., 79 2 (1973), pp. 373-376.

[FS] G.B. BOLLAND and E.M. STEIN, *Hardy spaces on homogeneous groups*, Mathematical Notes, Princeton Univ. Press. (1982).

[GL1] N. GAROFALO and F.H. LIN, *Monotonicity properties of variational integrals,* A_p *weights and unique continuation,* Indiana Univ. Math. J., 35 2 (1986), pp. 245-268.

[GL2] N. GAROFALO and F.H. LIN, *Unique continuation for elliptic operators: A geometric-variational approach,* Comm. in Pure and Appl. Math. XL (1987), pp. 347-366.

[G] B. GAVEAU, *Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous elliptiques sur certains groups nilpotents,* Acta Math., 139 (1977), pp. 95-153.

[He] W. HEISENBERG, *The physical principles of the quantum theory,* Dover 1949.

[H] L. HORMANDER, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math., 119 (1987), pp. 147-171.

[GL] N. GAROFALO and E. LANCONELLI, *Frequency functions on the Heisenberg group, the uncertainty principle and unique continuation*, Preprint.